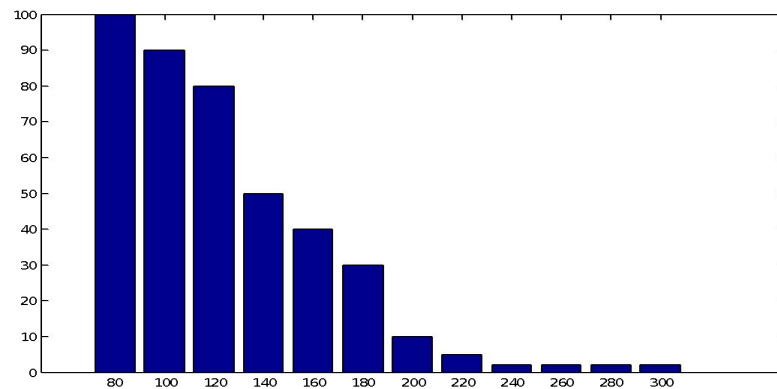




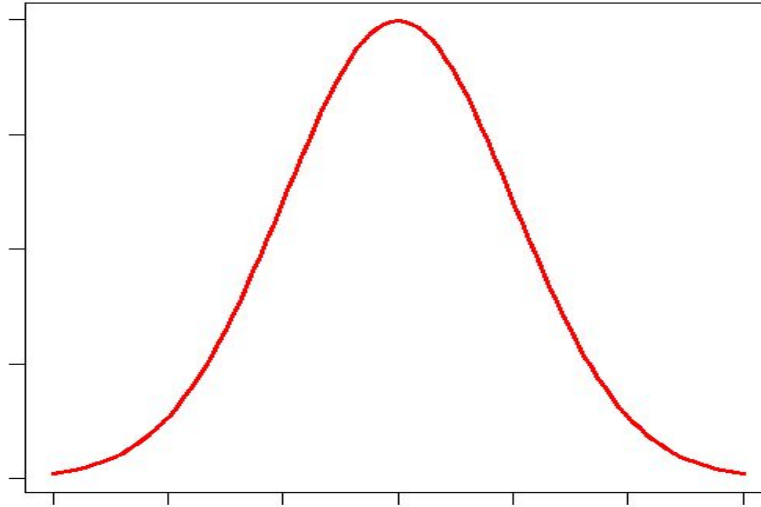
Universidade Federal do ABC



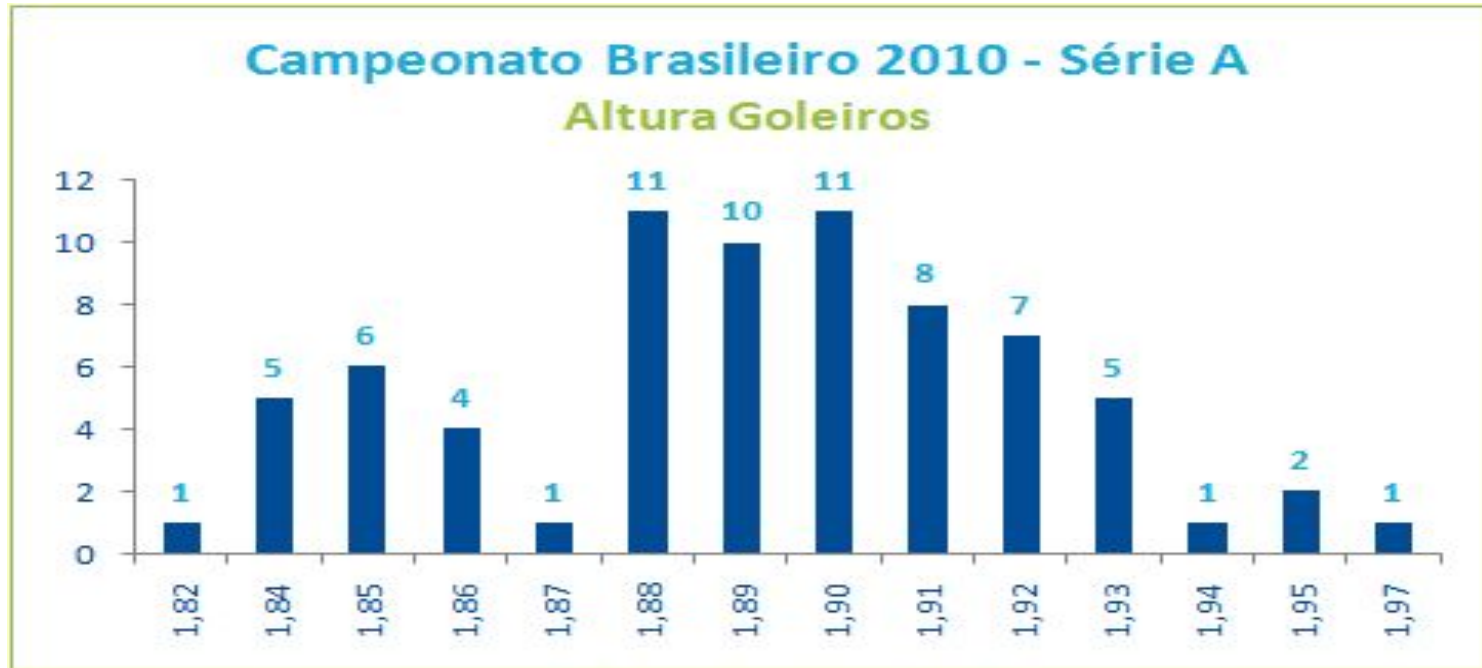
Distribuição dos Parâmetros da Rede

Prof. Fabrício Olivetti de França

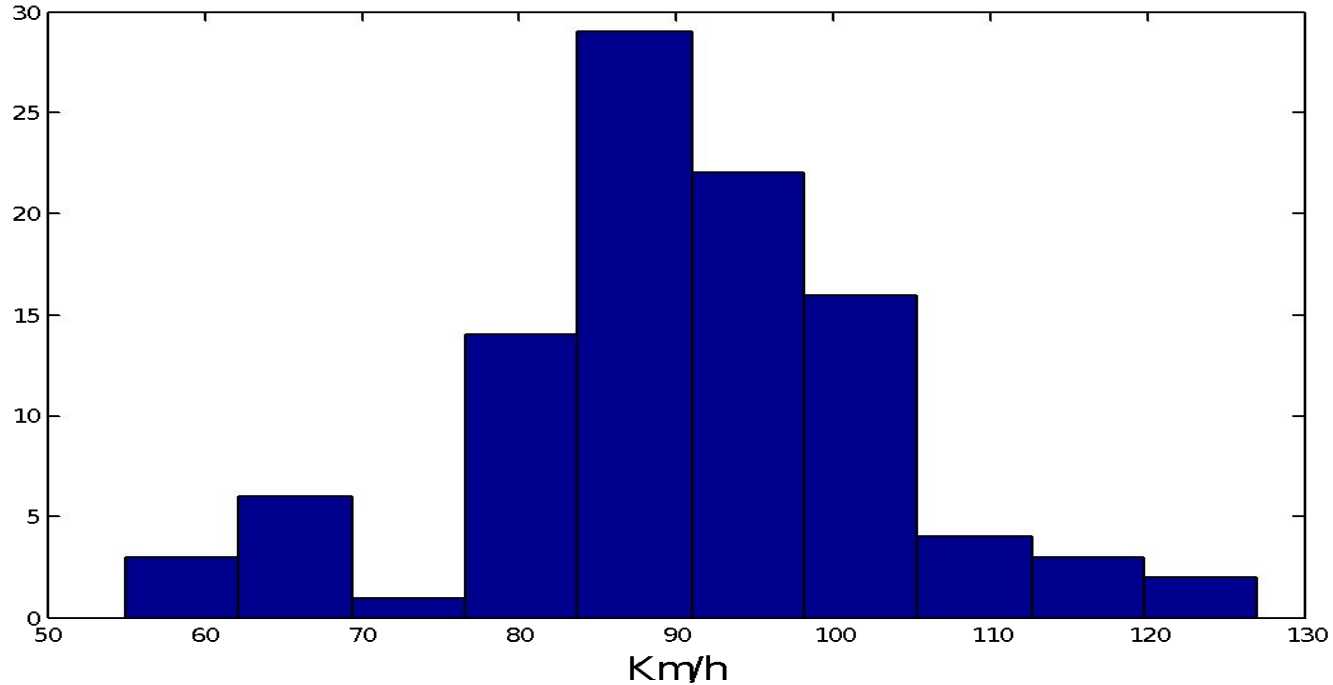
Distribuição de Dados



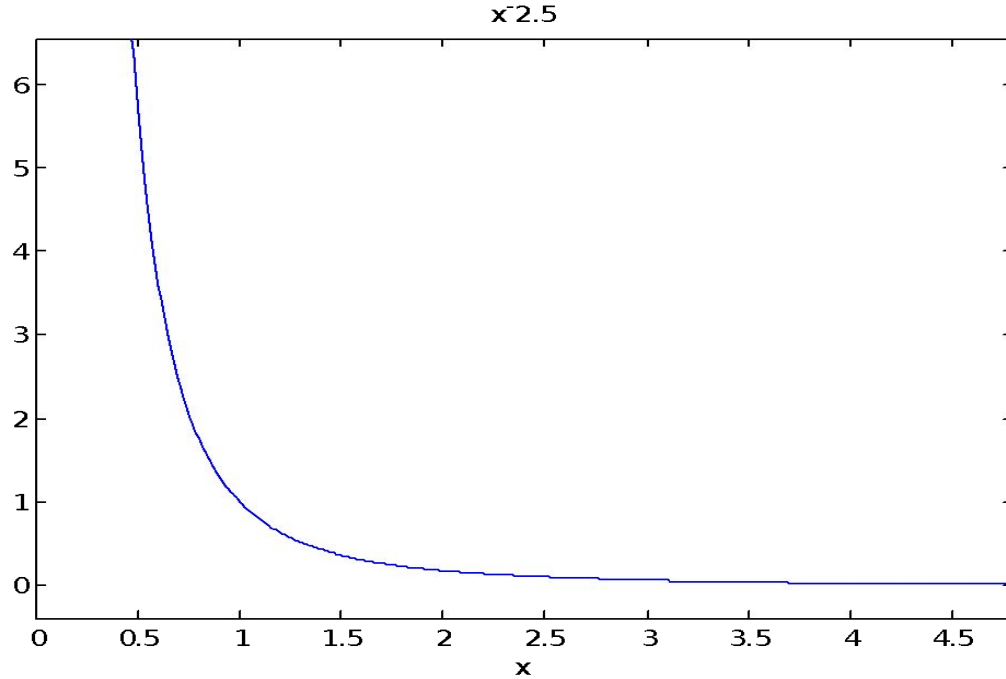
Distribuição de Dados



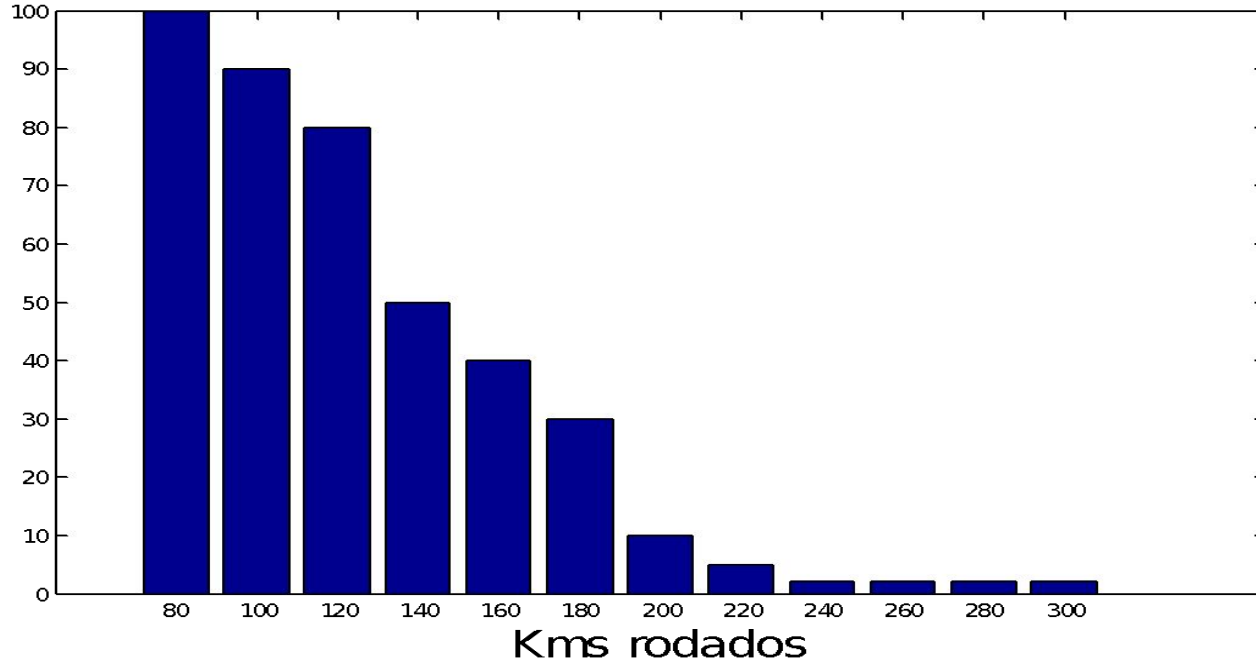
Distribuição de Dados



Distribuição de Dados

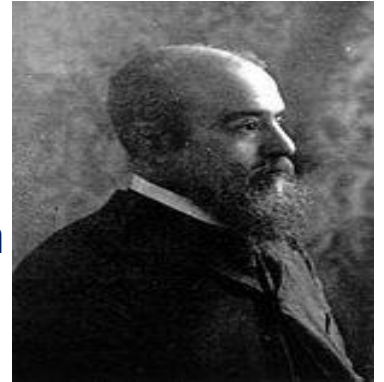


Distribuição de Dados



Medidas de Distribuição

- ❑ Maior parte das terras => minoria da
- ❑ Maior parte do lucro => minoria dos funcionários.

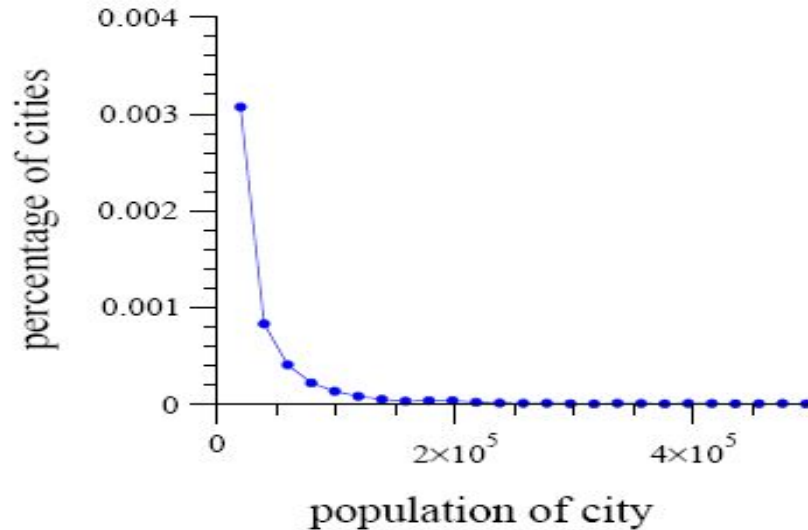


Vilfredo Pareto

Distribuição de Pareto

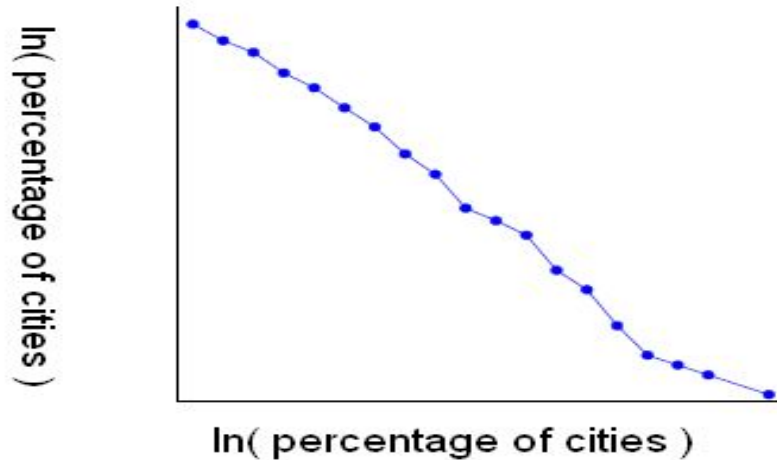
- ❑ Poucas cidades concentram maior parte da população
- ❑ Maioria dos crimes são cometidos pela menor parte dos criminosos
- ❑ Minoria das palavras de um idioma aparecem com maior frequência

Distribuição de Pareto



histogram of the populations of all US cities with population of 10 000 or more.

Distribuição de Pareto



Another histogram of the same data, but plotted on logarithmic scales.

Lei da Potência

$$\log(y) = -\alpha \log(x) + b$$

$$y = e^{-\alpha \log(x) + b}$$

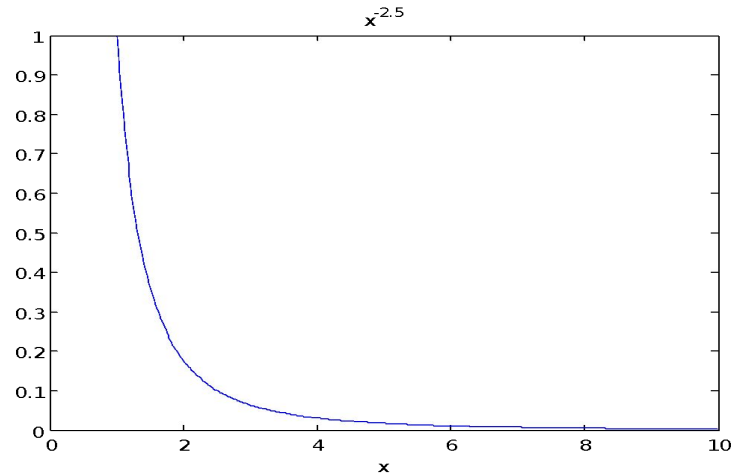
$$y = e^{\log(x^{-\alpha}) + b}$$

$$y = e^{\log(x^{-\alpha})} e^b$$

$$y = c \cdot x^{-\alpha}$$

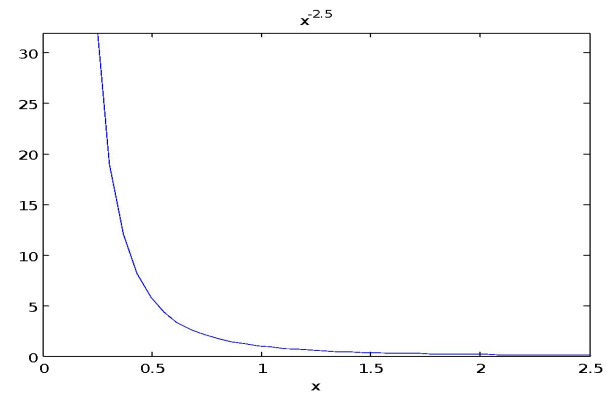
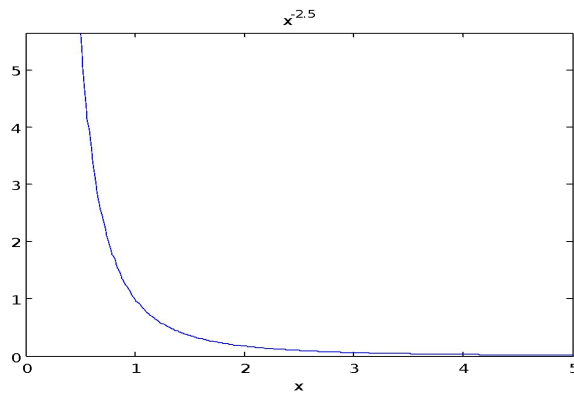
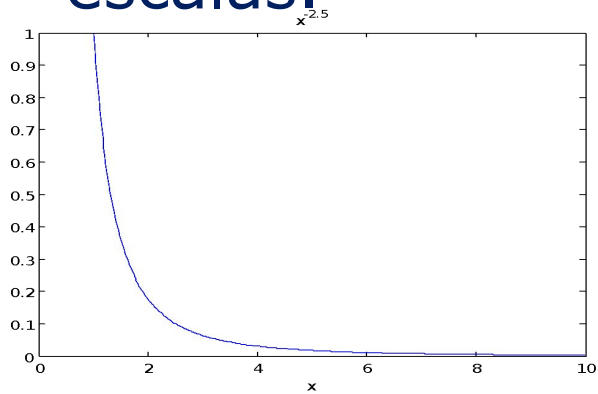
Lei da Potência

Distribuição de lei de potência.



Lei da Potência

Vamos ver a função $f(x) = x^{-2.5}$ em diferentes escalas.

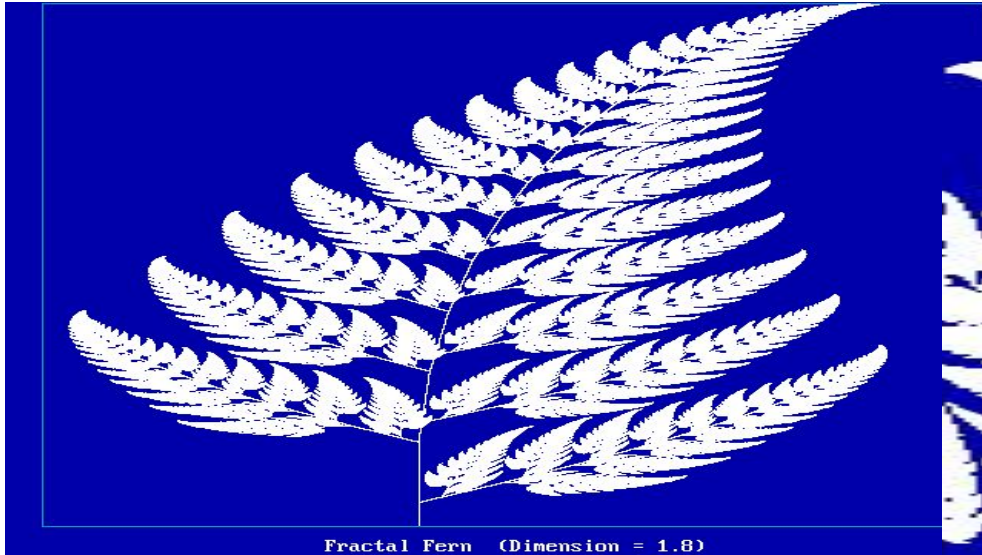


Invariância em Escala

$$f(x) = ax^k$$

$$f(c \cdot x) = a(c \cdot x)^k = a \cdot c^k \cdot x^k \propto f(x)$$

Invariância à Escala (Fractais)



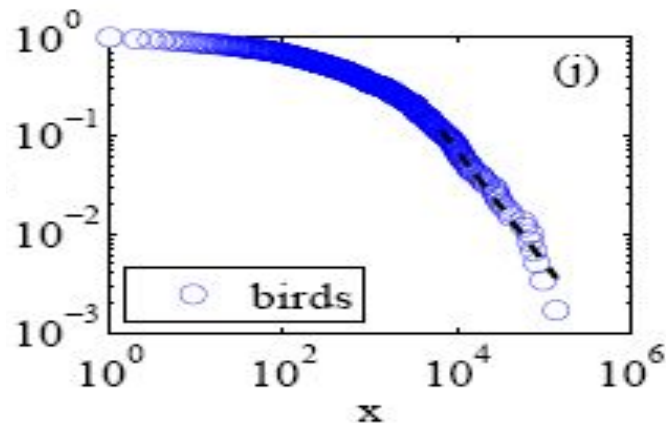
Invariância à Escala (Fractais)



https://en.wikipedia.org/wiki/File:Fractal_Broccoli.jpg



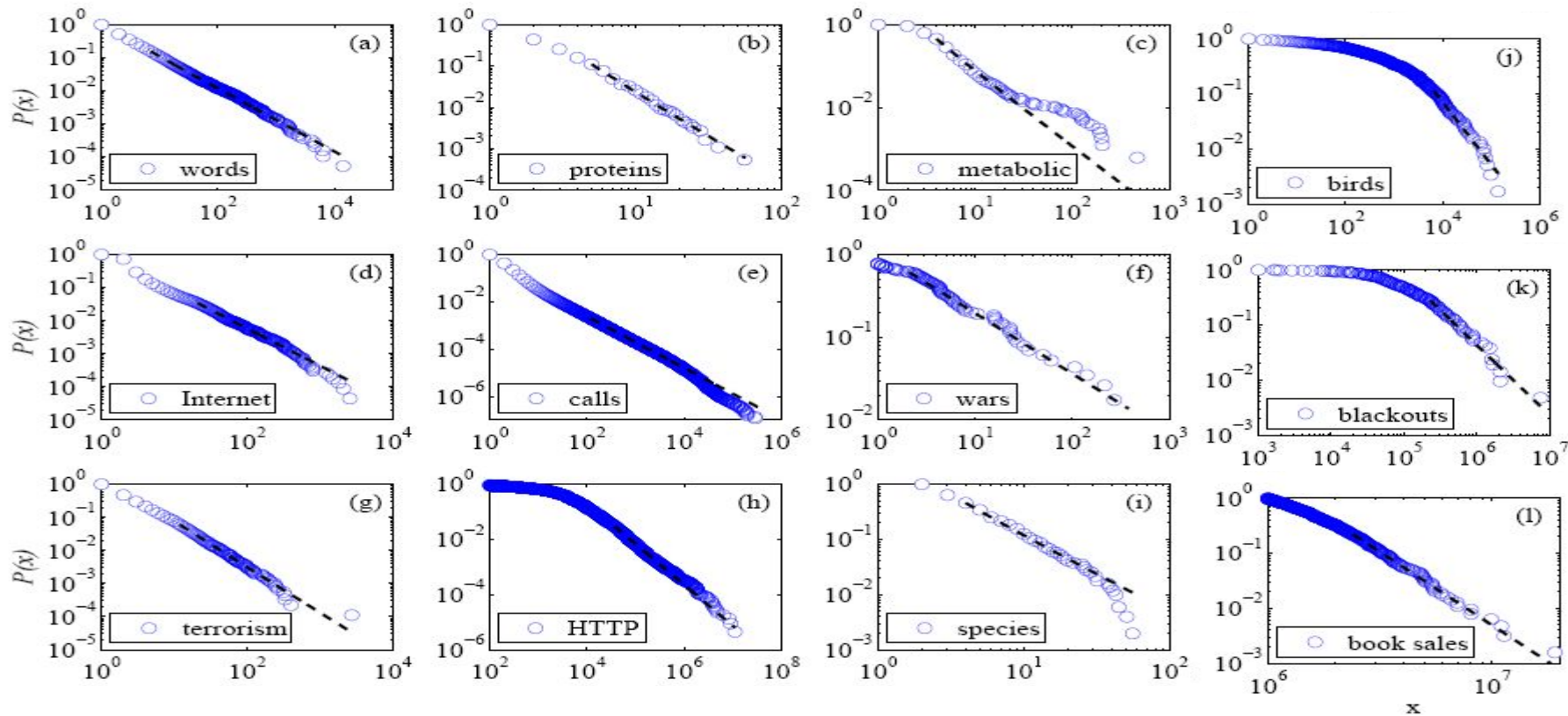
Universidade Federal do ABC



Lei de Potência em Redes

Prof. Fabrício Olivetti de França

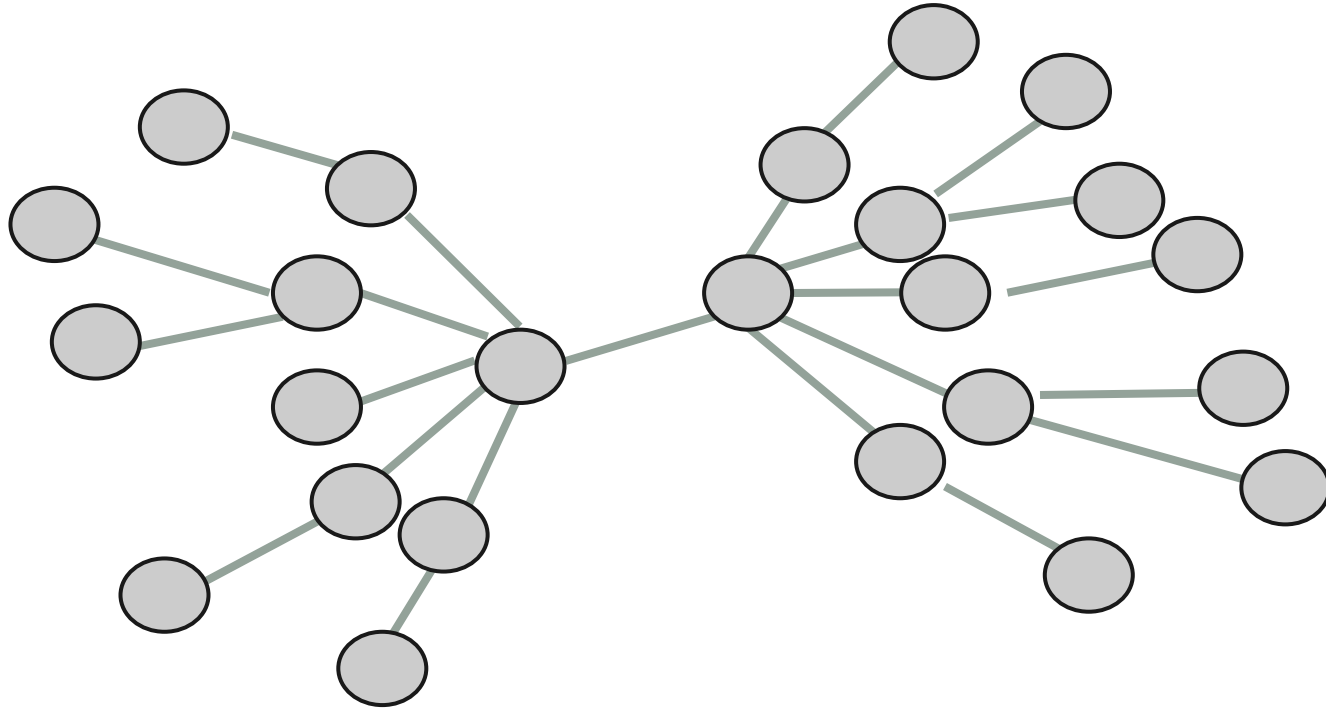
Lei de Potência do Grau dos Nós



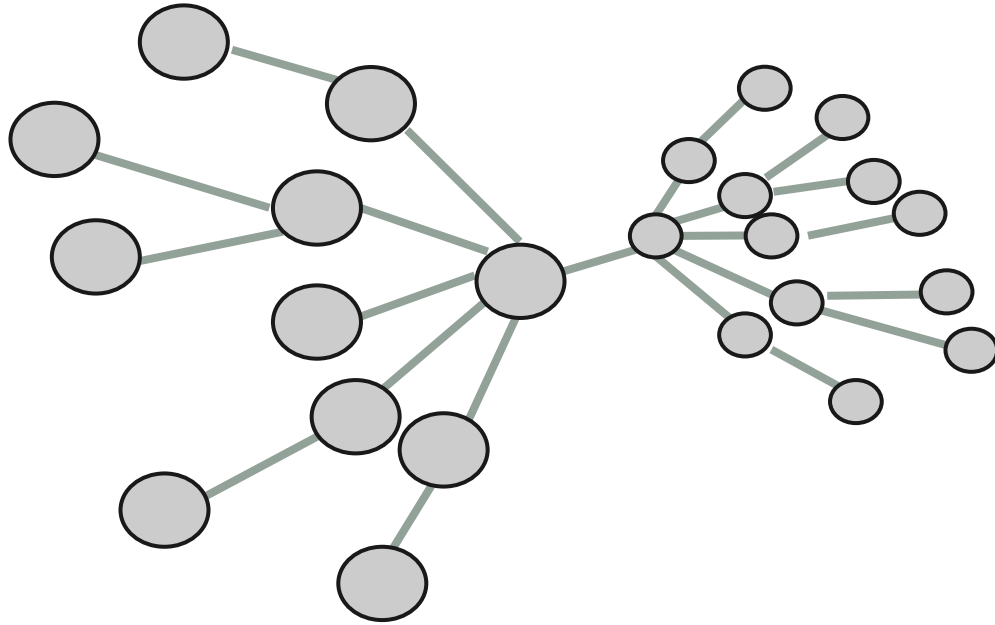
Invariância em Rede

$$\frac{f(2k)}{f(k)} = \frac{c(2k)^{-\alpha}}{ck^{-\alpha}} = 2^{-\alpha}$$

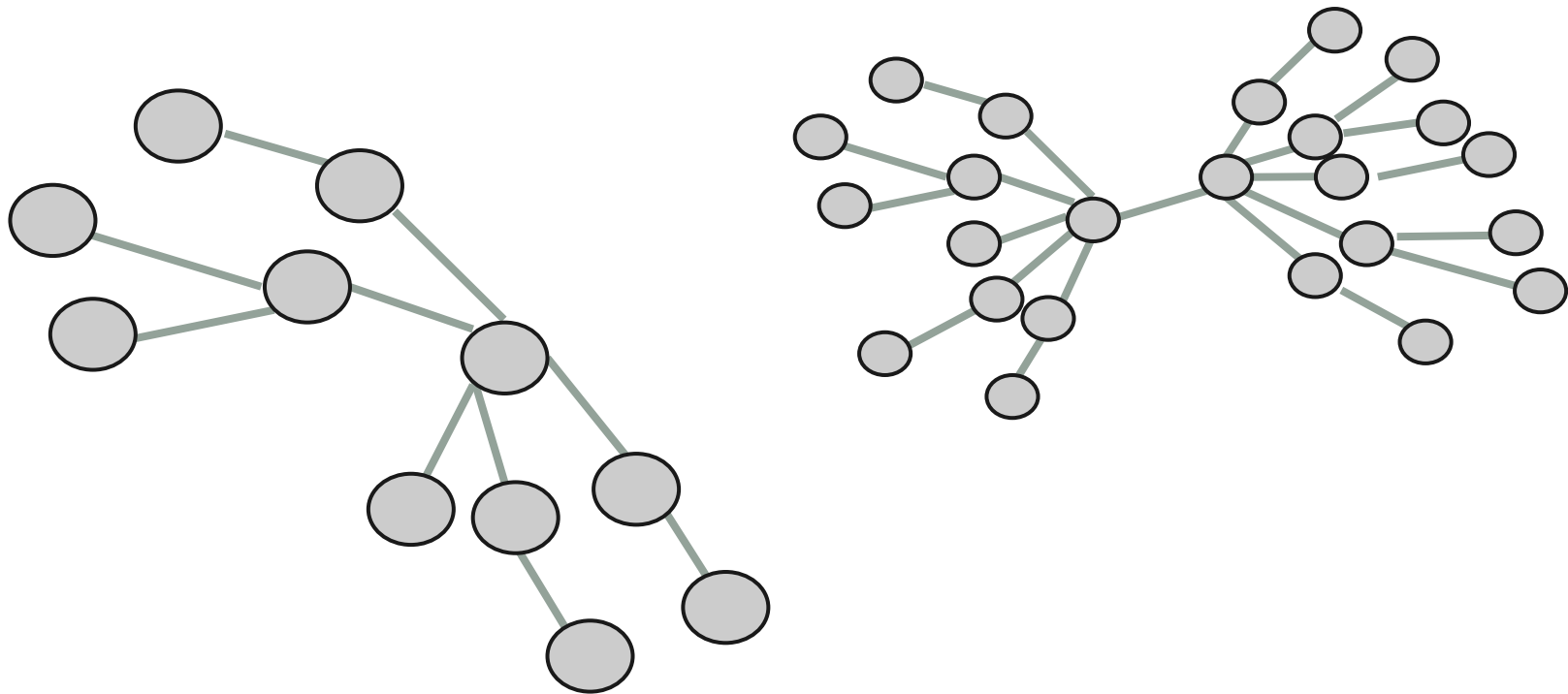
Invariância em Rede



Invariância em Rede



Invariância em Rede



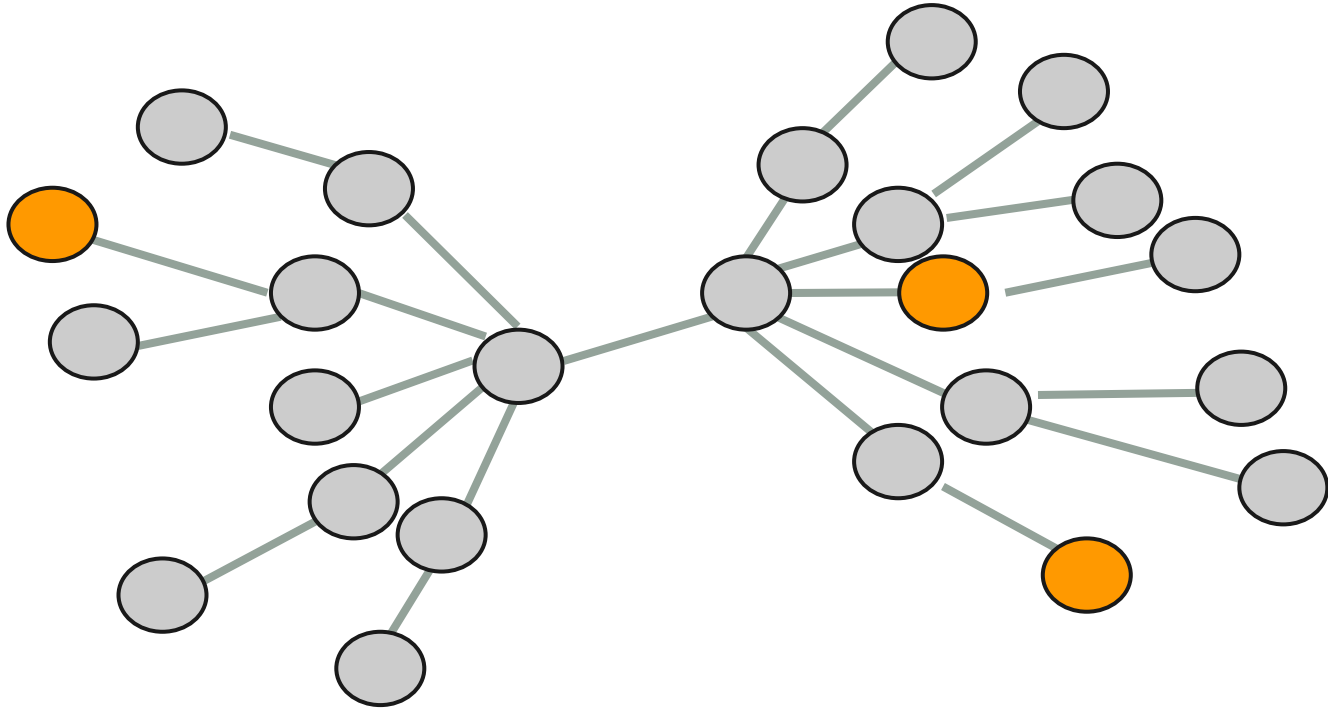
Redes Sem Escala

$$\bar{d} \propto \log n$$

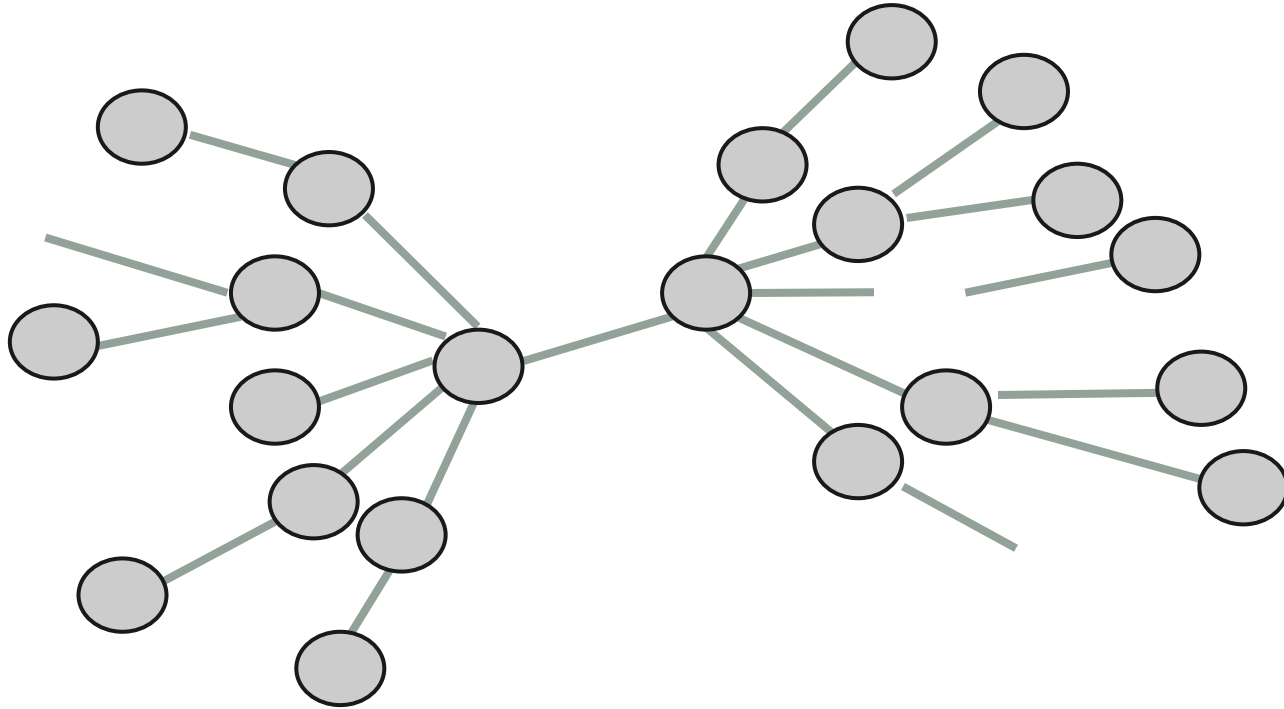
Invariância em Rede

- ❑ Hackers atacando redes de internet
- ❑ Falha em um nó de uma malha de distribuição de energia
- ❑ Surgimento de um vírus
- ❑ Incêndio em uma floresta

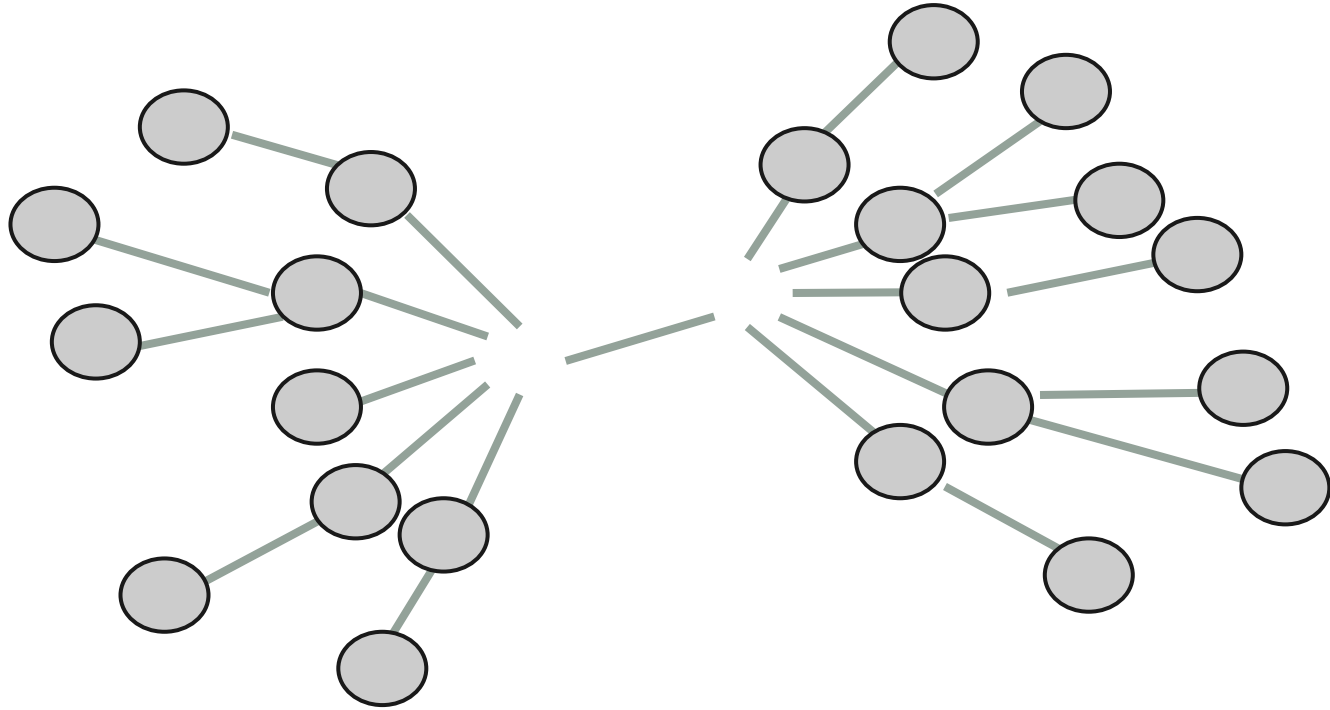
Invariância em Rede



Invariância em Rede



Invariância em Rede





Universidade Federal do ABC

Cidades como Redes

Prof. Fabrício Olivetti de França

Cidades como Seres Vivos



<https://www.pxfuel.com/en/free-photo-iyoji>

Cidades como Seres Vivos

$$Y(t) = Y_0 N(t)^\alpha$$

Cidades como Seres Vivos

- ❑ Energia consumida
- ❑ Riqueza
- ❑ Patentes
- ❑ Poluição
- ❑ Crimes
- ❑ Número de mercados
- ❑ etc.

Cidades como Seres Vivos

Table 1. Scaling exponents for urban indicators vs. city size

Y	β	95% CI	Adj- R^2	Observations	Country-year
New patents	1.27	[1.25,1.29]	0.72	331	U.S. 2001
Inventors	1.25	[1.22,1.27]	0.76	331	U.S. 2001
Private R&D employment	1.34	[1.29,1.39]	0.92	266	U.S. 2002
"Supercreative" employment	1.15	[1.11,1.18]	0.89	287	U.S. 2003
R&D establishments	1.19	[1.14,1.22]	0.77	287	U.S. 1997
R&D employment	1.26	[1.18,1.43]	0.93	295	China 2002
Total wages	1.12	[1.09,1.13]	0.96	361	U.S. 2002
Total bank deposits	1.08	[1.03,1.11]	0.91	267	U.S. 1996
GDP	1.15	[1.06,1.23]	0.96	295	China 2002
GDP	1.26	[1.09,1.46]	0.64	196	EU 1999–2003
GDP	1.13	[1.03,1.23]	0.94	37	Germany 2003
Total electrical consumption	1.07	[1.03,1.11]	0.88	392	Germany 2002
New AIDS cases	1.23	[1.18,1.29]	0.76	93	U.S. 2002–2003
Serious crimes	1.16	[1.11, 1.18]	0.89	287	U.S. 2003

Cidades como Seres Vivos

Table 1. Scaling exponents for urban indicators vs. city size

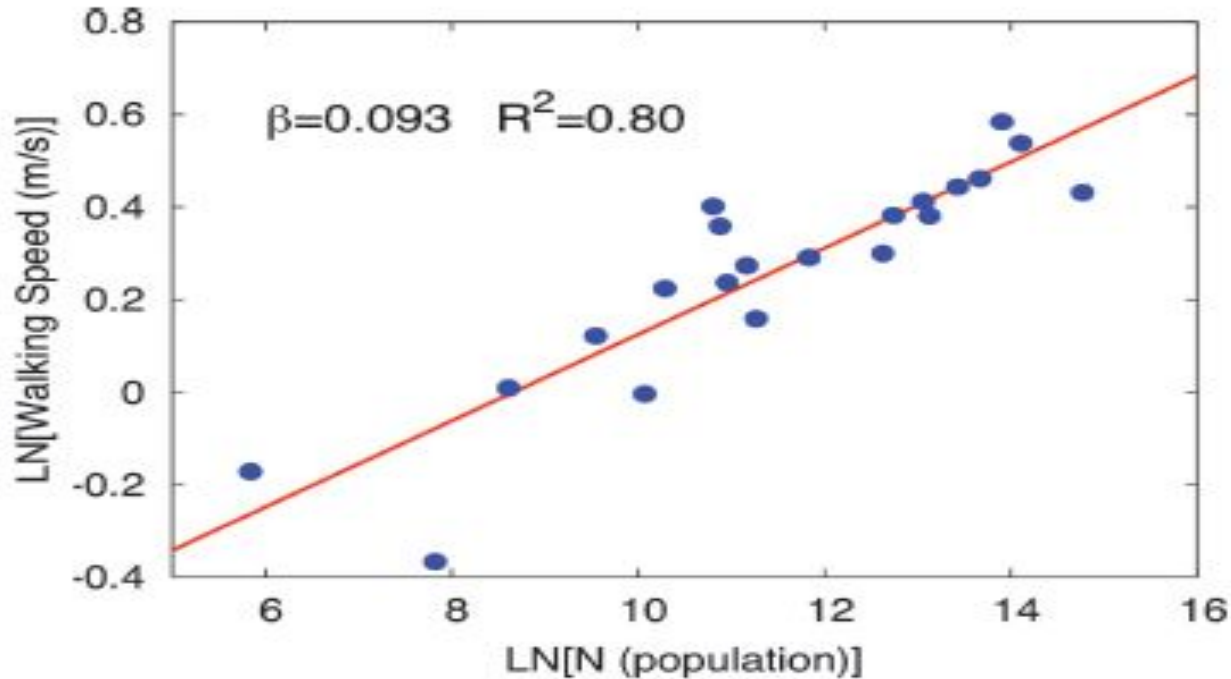
Y	β	95% CI	Adj- R^2	Observations	Country-year
Serious crimes	1.16	[1.11, 1.18]	0.89	287	U.S. 2003
Total housing	1.00	[0.99, 1.01]	0.99	316	U.S. 1990
Total employment	1.01	[0.99, 1.02]	0.98	331	U.S. 2001
Household electrical consumption	1.00	[0.94, 1.06]	0.88	377	Germany 2002
Household electrical consumption	1.05	[0.89, 1.22]	0.91	295	China 2002
Household water consumption	1.01	[0.89, 1.11]	0.96	295	China 2002
Gasoline stations	0.77	[0.74, 0.81]	0.93	318	U.S. 2001
Gasoline sales	0.79	[0.73, 0.80]	0.94	318	U.S. 2001
Length of electrical cables	0.87	[0.82, 0.92]	0.75	380	Germany 2002
Road surface	0.83	[0.74, 0.92]	0.87	29	Germany 2002

Data sources are shown in [SI Text](#). CI, confidence interval; Adj- R^2 , adjusted R^2 ; GDP, gross domestic product.

Padrões de expoente

- ❑ $\alpha = 1$: Linear
- ❑ $\alpha < 1$: Sublinear
- ❑ $\alpha > 1$: Superlinear

Padrões de expoente



Equações do Crescimento

Y: recurso mensurável

R: recurso por unidade de tempo

E: quantidade para adicionar um indivíduo

N: população

dN/dt : taxa de crescimento

Equações do Crescimento

$$Y = R \cdot N + E \cdot \frac{dN}{dt}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{Y}{E} - \frac{R}{E} \cdot N$$

Equações do Crescimento

$$Y = Y_0 N(t)^\alpha$$

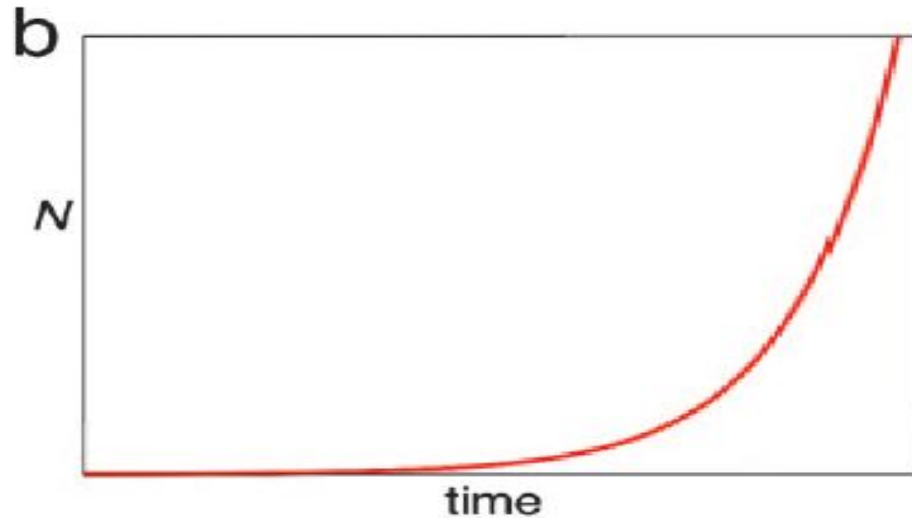
$$\frac{dN}{dt} = \frac{Y}{E} - \frac{R}{E} \cdot N \quad \Rightarrow \quad \frac{dN(t)}{dt} = \frac{Y_0}{E} N(t)^\alpha - \frac{R}{E} N(t)$$

Equações do Crescimento

$$N(t) = \left[\frac{Y_0}{R} + \left(N(0)^{1-\alpha} - \frac{Y_0}{R} e^{-\frac{R}{E}(1-\alpha)t} \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

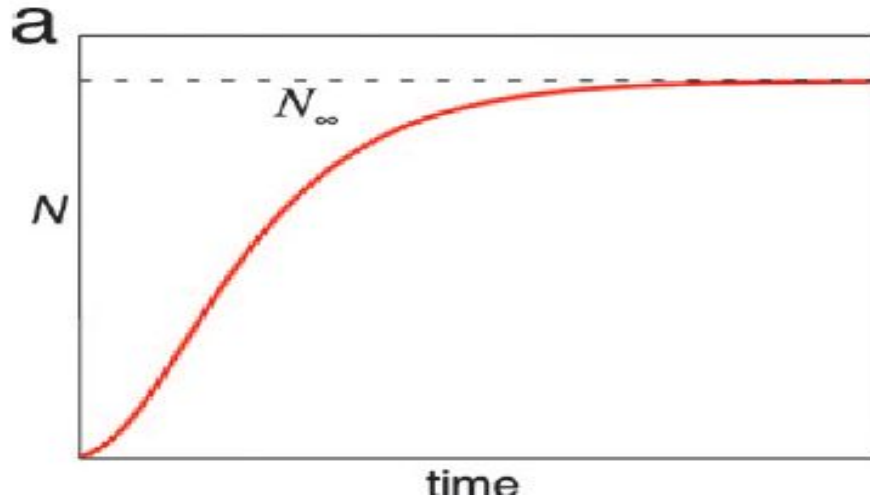
Equações do Crescimento

$$N(t)_{\alpha \rightarrow 1} = N(0)e^{\frac{(Y_0 - R)t}{E}}$$



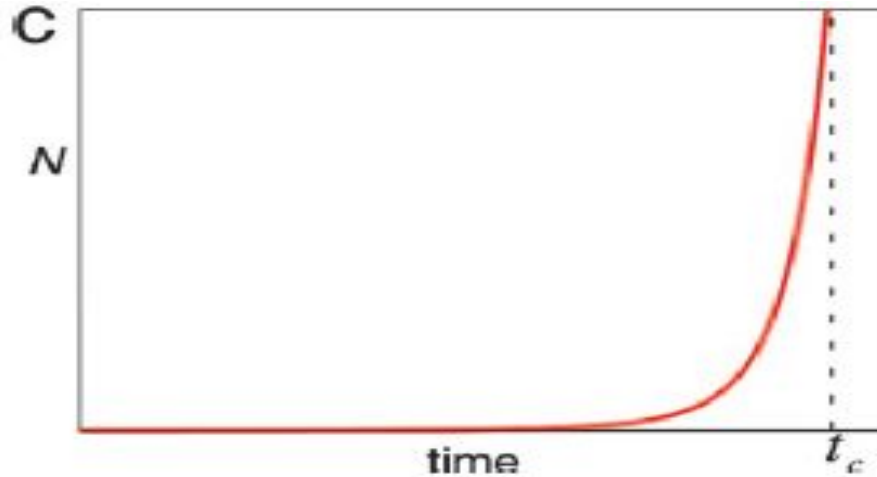
Equações do Crescimento

$$\alpha < 1$$

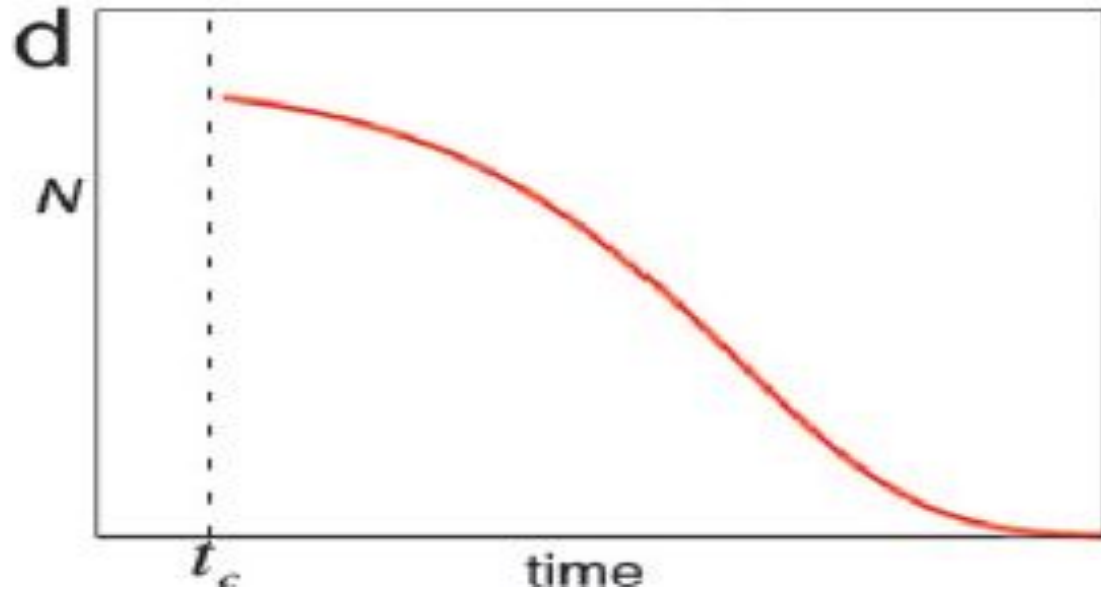


Equações do Crescimento

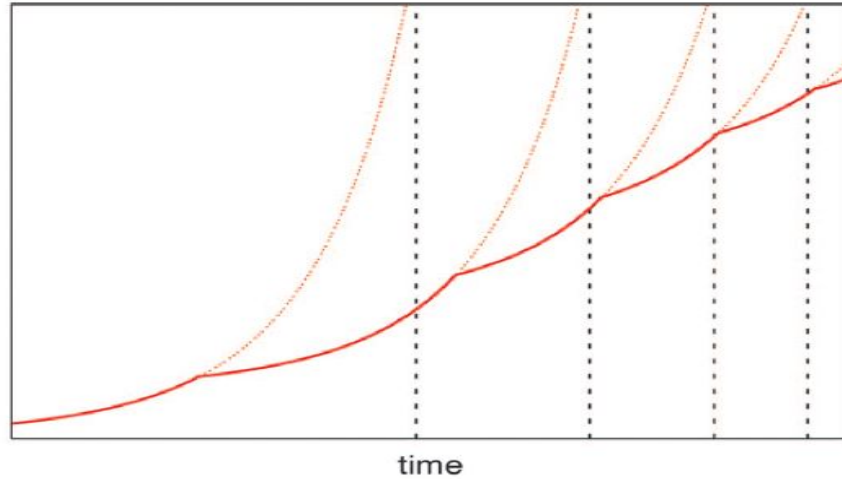
$$\alpha > 1$$



Equações do Crescimento



Equações do Crescimento

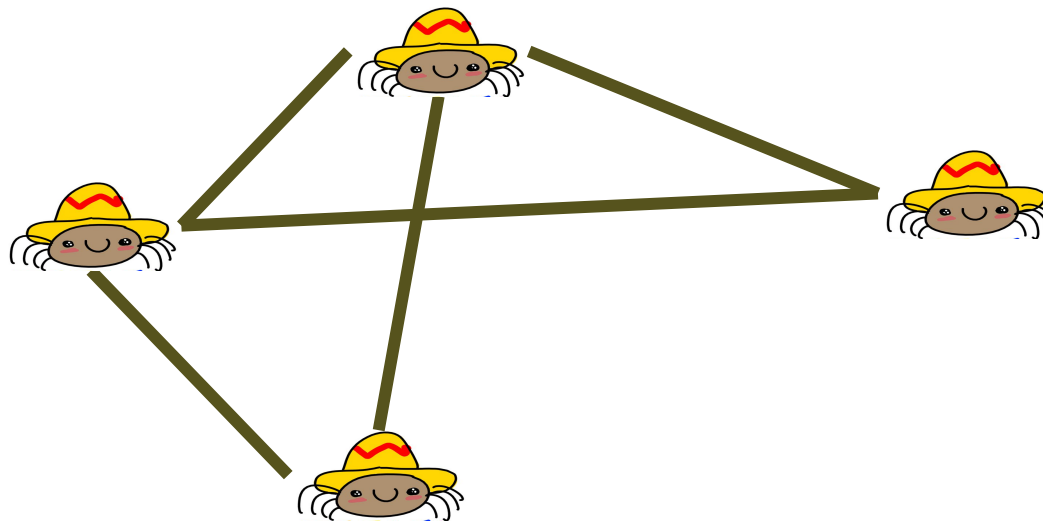


Escala e auto-organização

Expoente	Objetivo	Organização	Crescimento
$\alpha < 1$	Otimização e eficiência	Sustentável	Sigmoidal
$\alpha > 1$	Riqueza, recursos, informação	Agregadora	Explosão/Colapso
$\alpha = 1$	Manutenção Individual	Individual	Exponencial



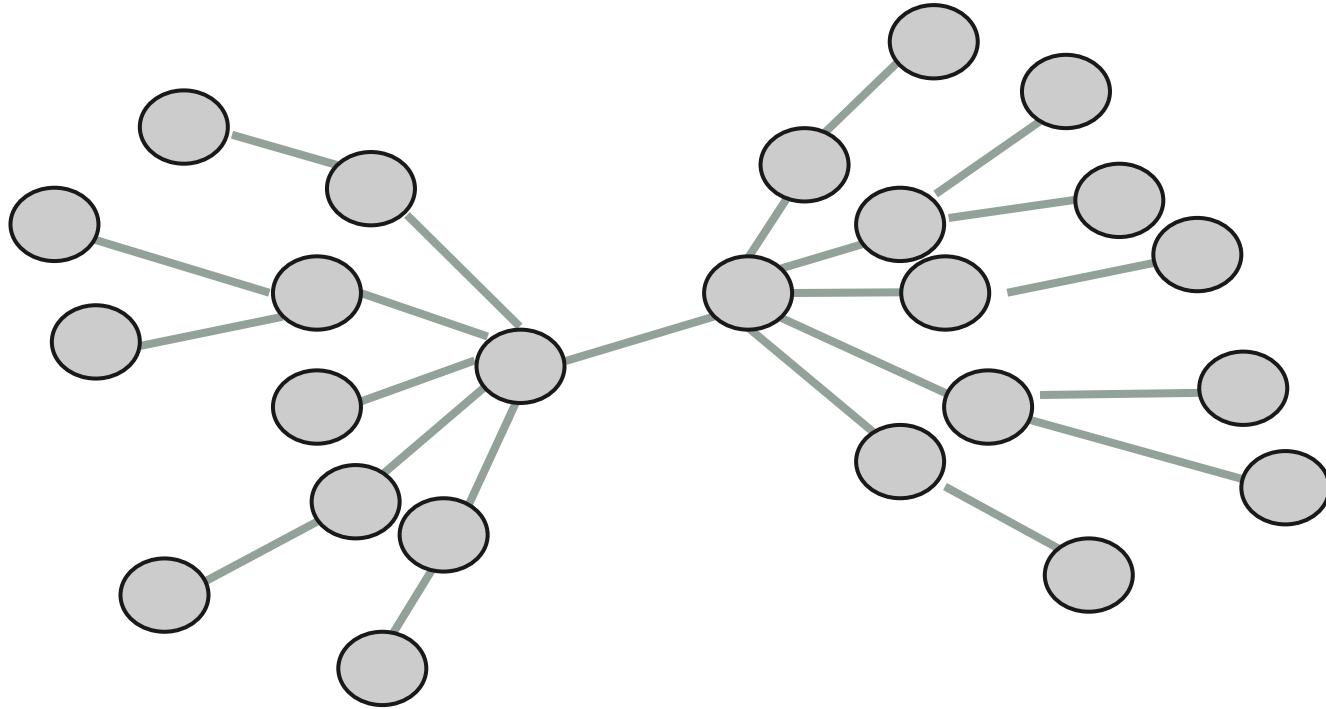
Universidade Federal do ABC



Modelos de Redes Livres de Escala

Prof. Fabrício Olivetti de França

Modelos de Redes Sem Escala

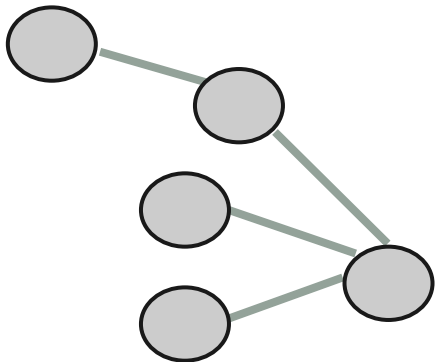


Revisitando os Fractais

Triângulo de Sierpinski



Redes Sem Escala

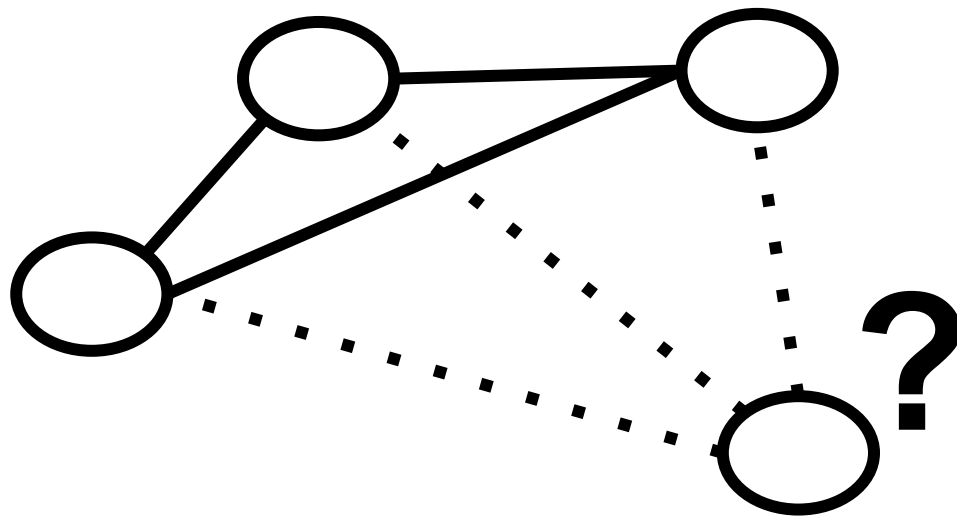


Redes Sem Escala

- ❑ **Taxa de crescimento**
- ❑ **Ligação preferencial**



Taxa de Crescimento

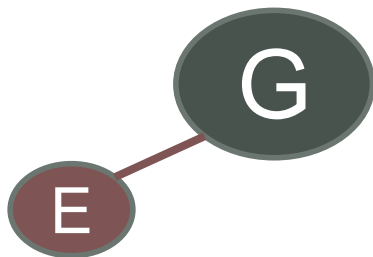


Modelo realístico

- ❑ Preferência por popularidade
- ❑ Nós se tornam inativos
- ❑ Atração por mais conexões



Ligação Preferencial



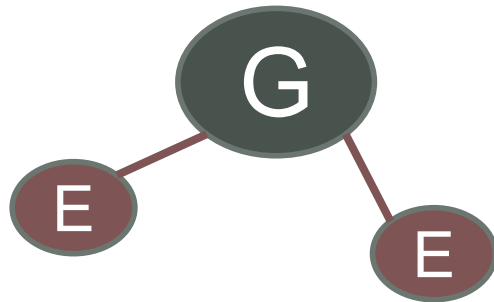
Gênero



Espécie



Ligação Preferencial



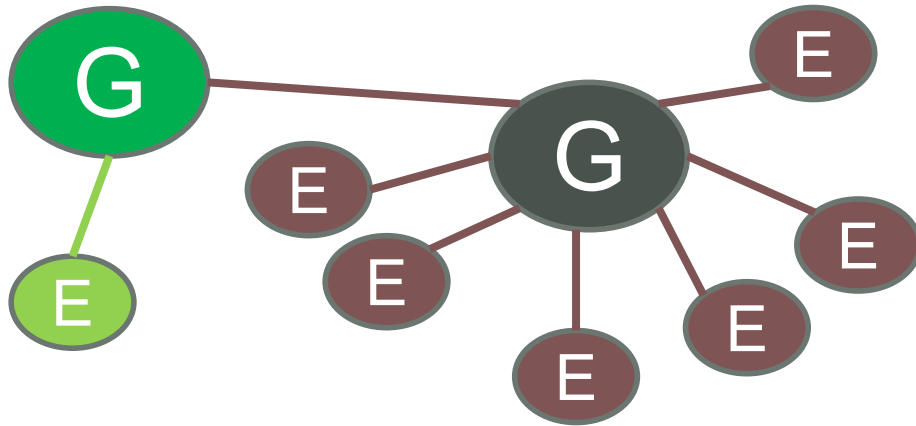
Gênero



Espécie



Ligação Preferencial



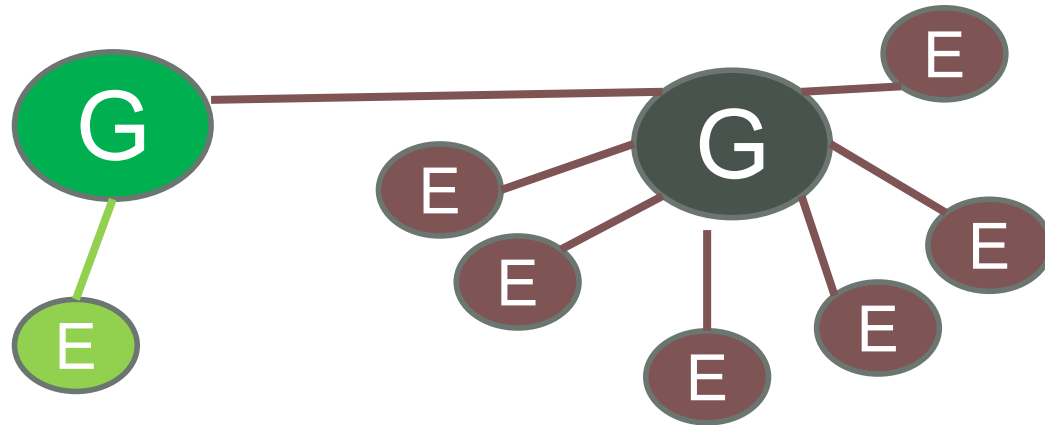
Gênero



Espécie



Ligação Preferencial



Ligação Preferencial



<https://www.flickr.com/photos/ennor/4973546393/>



Ligação Preferencial



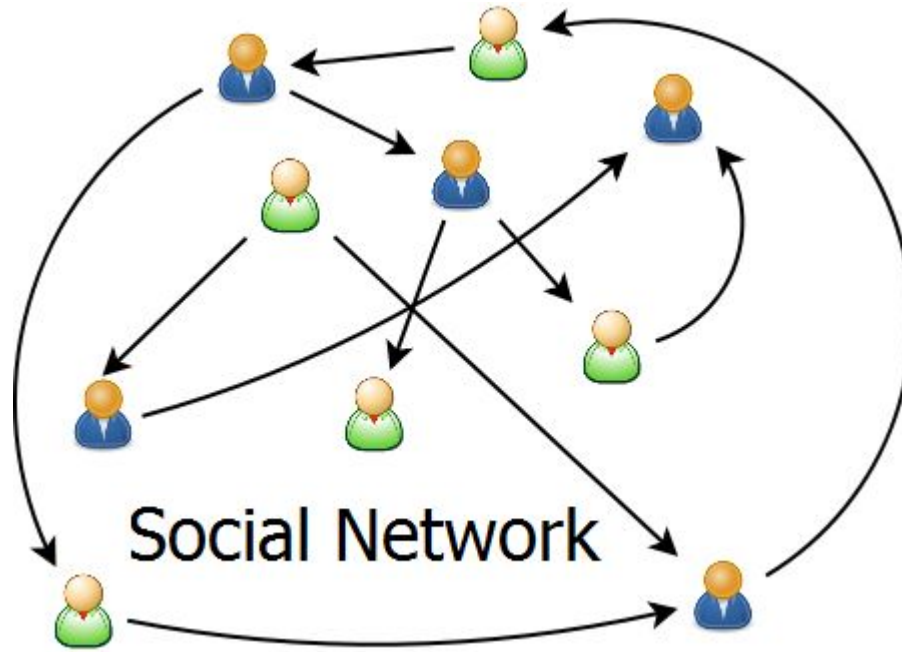
Ligação Preferencial



<https://pixabay.com/pt/photos/s%C3%A3o-paulo-cidade-vista-brasil-407301/>



Ligação Preferencial



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Social_Network.png



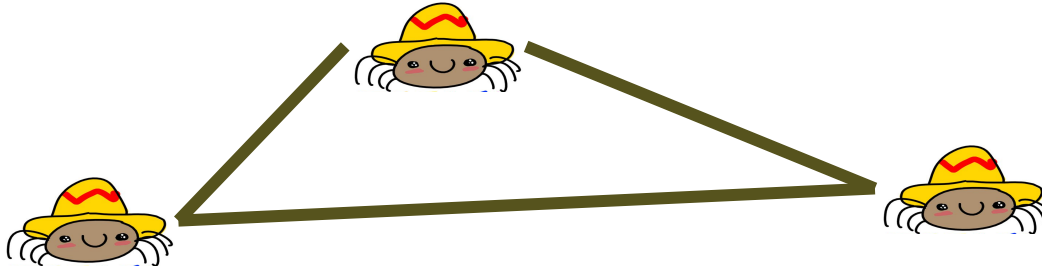
Modelo Barabási-Albert

- **Inicialização:** crie uma rede com alguns nós
- **Crescimento:** insira outros nós a cada instante de tempo
- **Ligação Preferencial:** Para cada novo nó, crie algumas arestas com probabilidade:

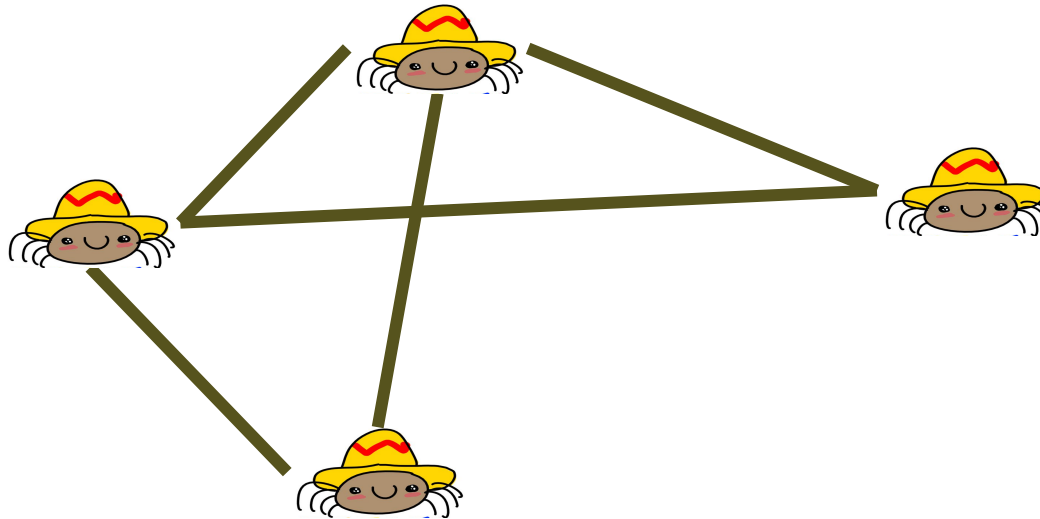
$$P(k_i) = \frac{k_i}{\sum_{j=1}^n k_j}$$



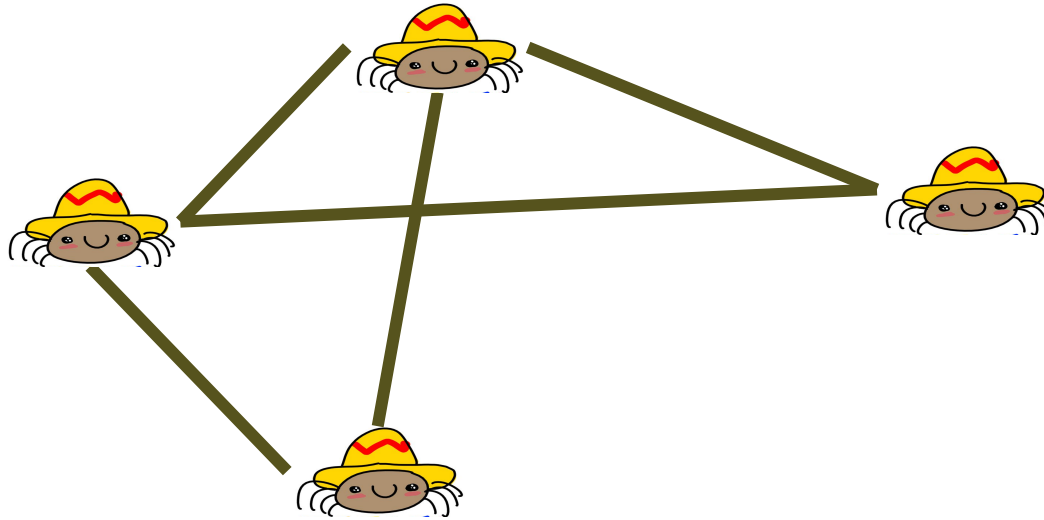
Modelo Barabási-Albert



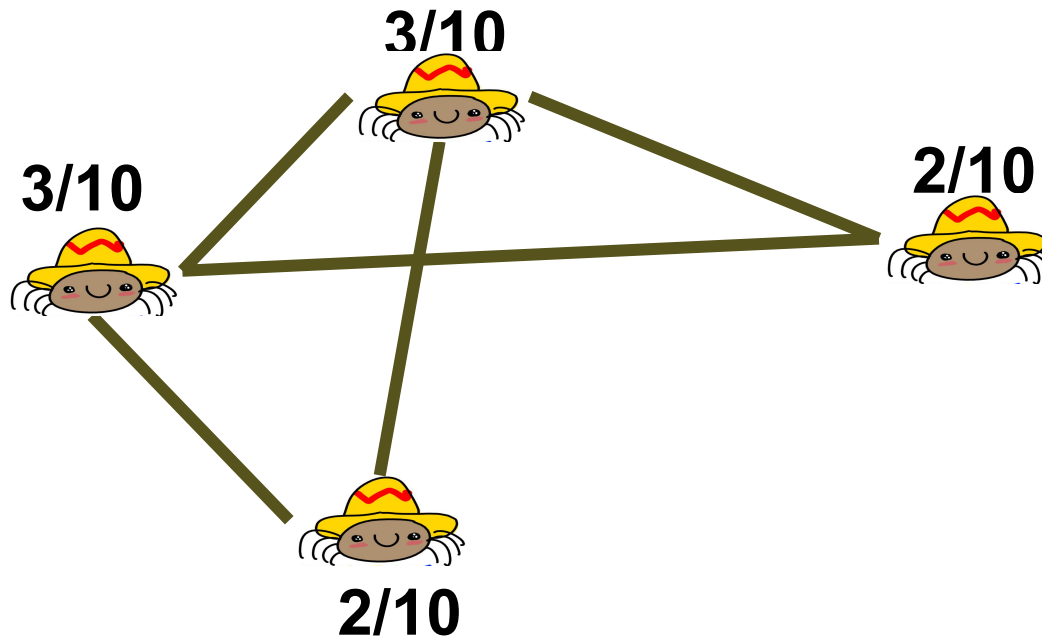
Modelo Barabási-Albert



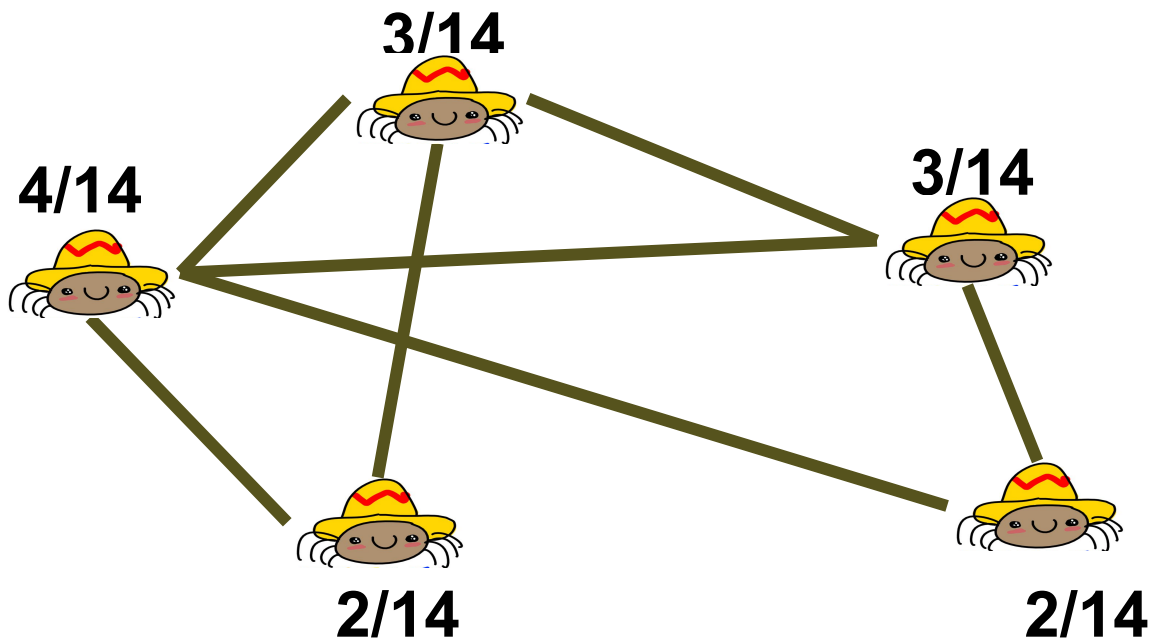
Modelo Barabási-Albert



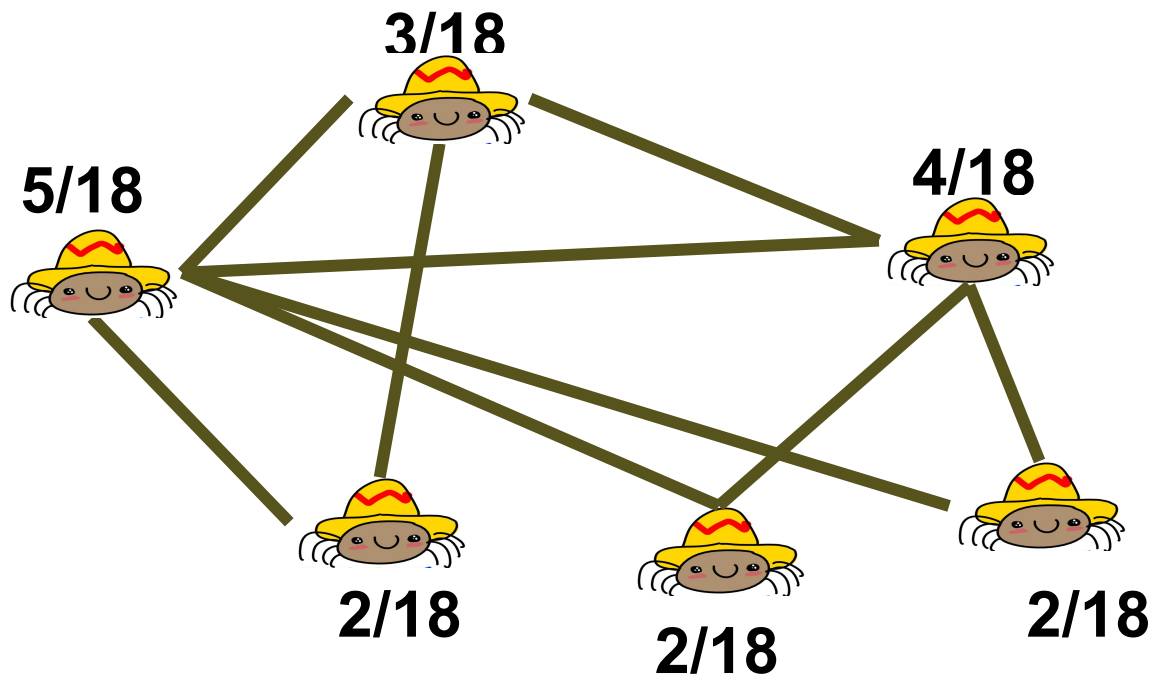
Modelo Barabási-Albert



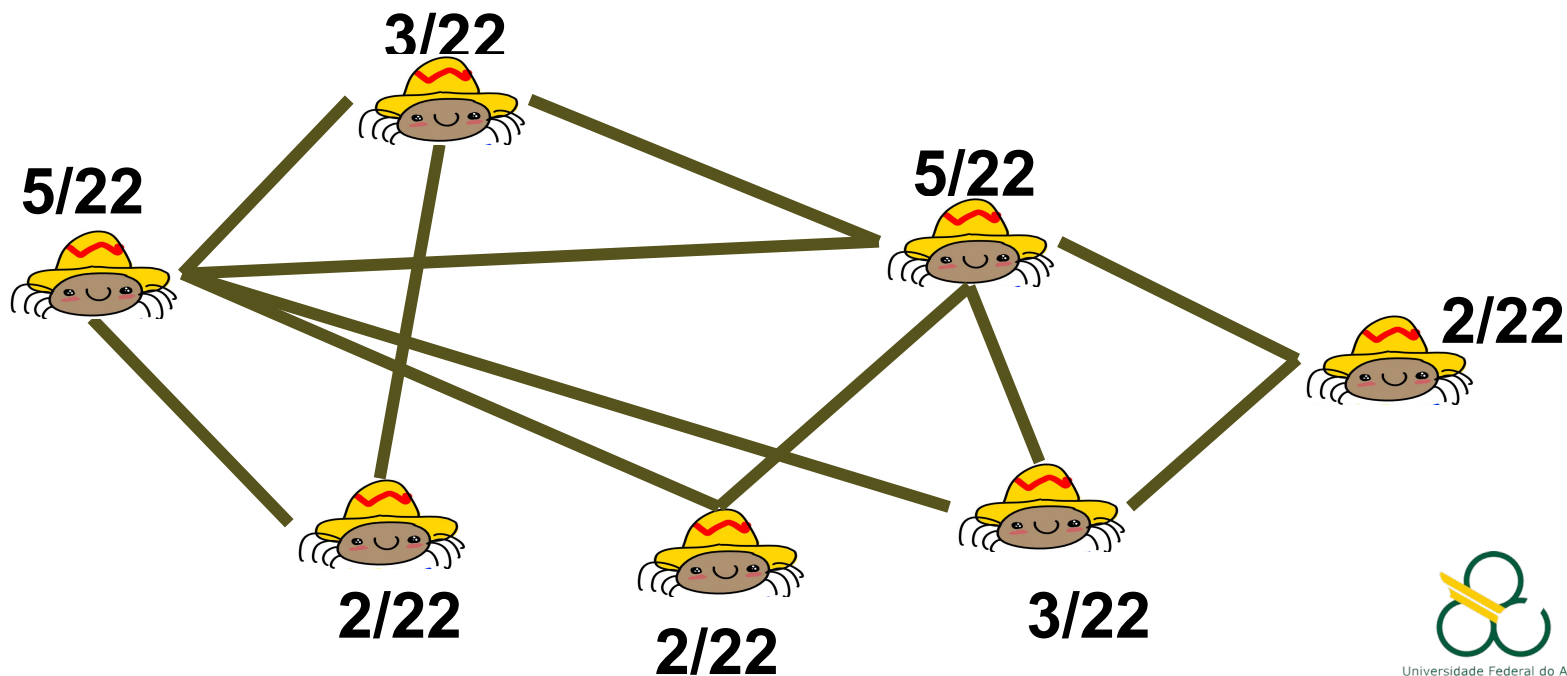
Modelo Barabási-Albert



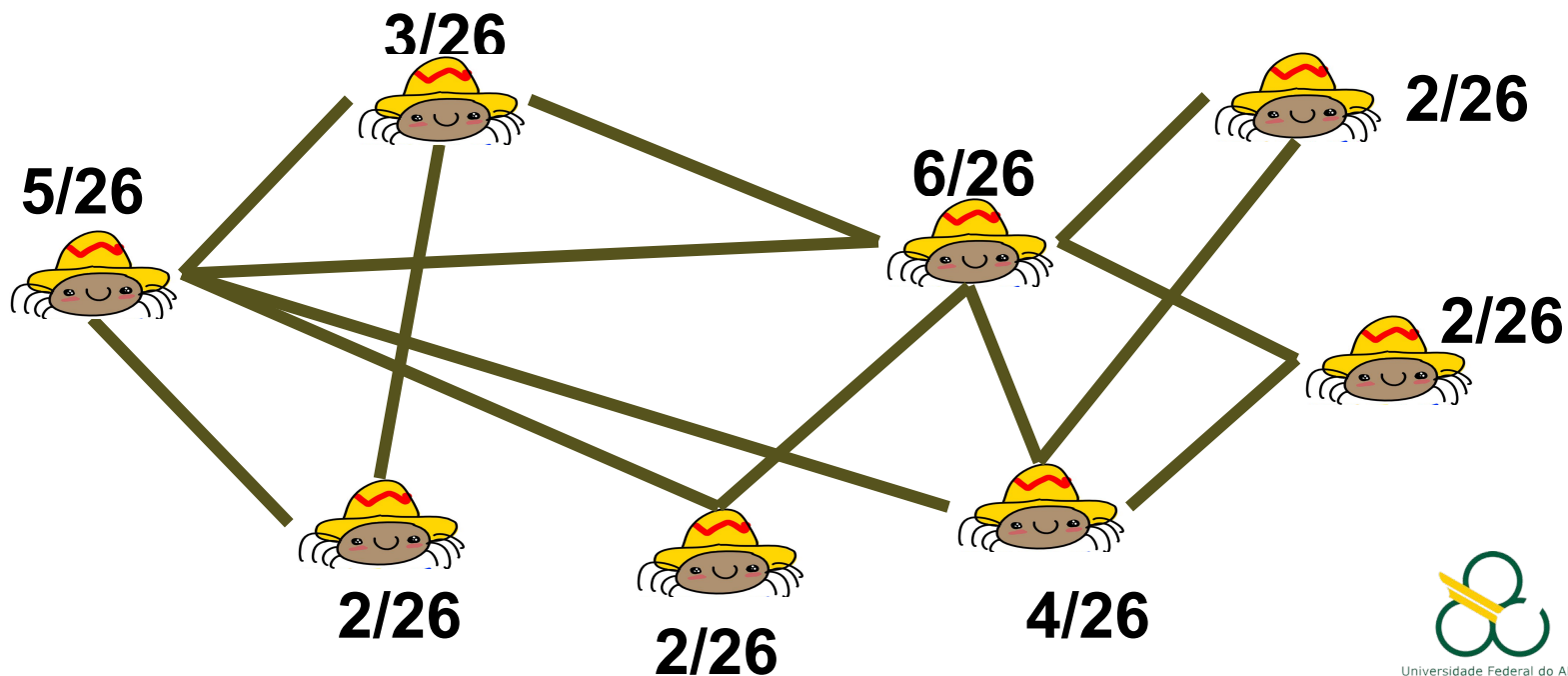
Modelo Barabási-Albert



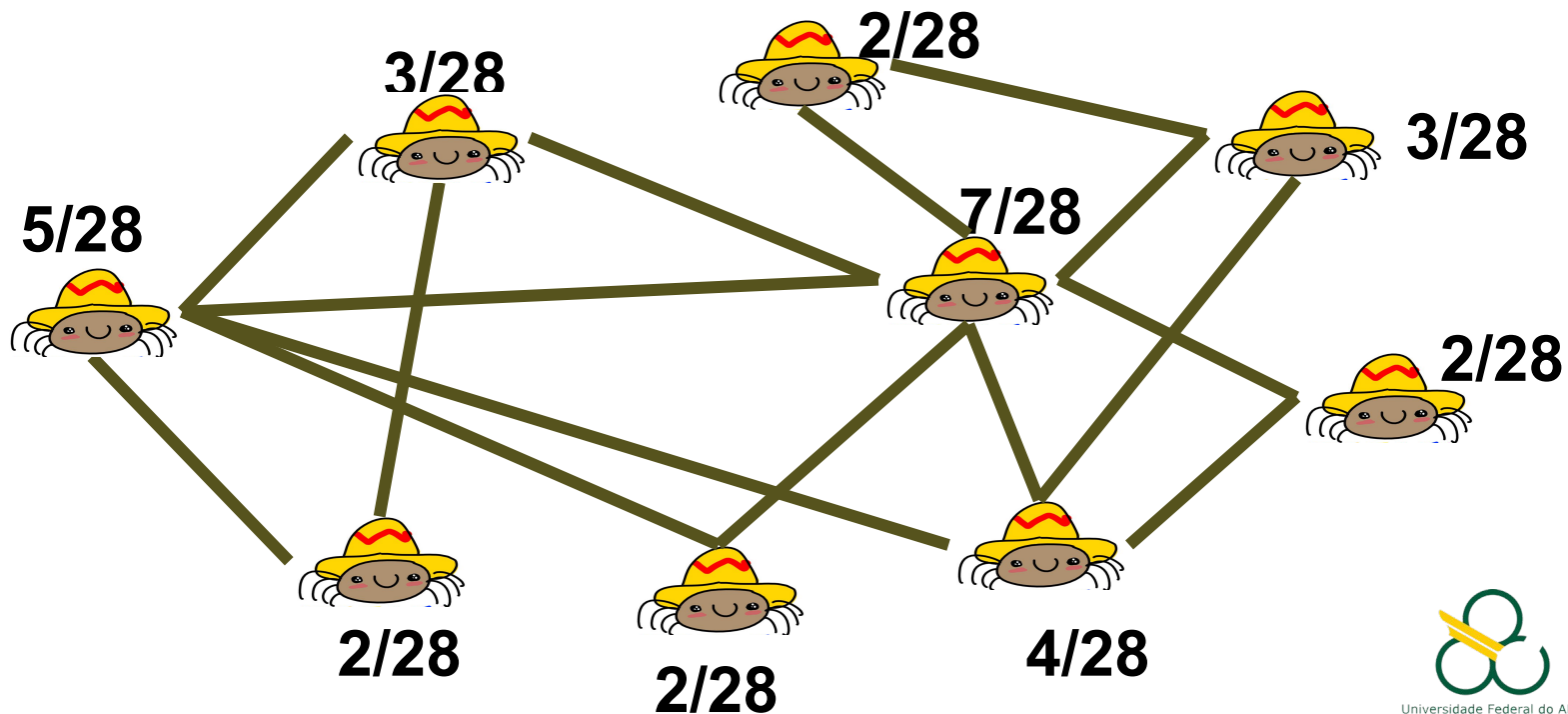
Modelo Barabási-Albert



Modelo Barabási-Albert



Modelo Barabási-Albert

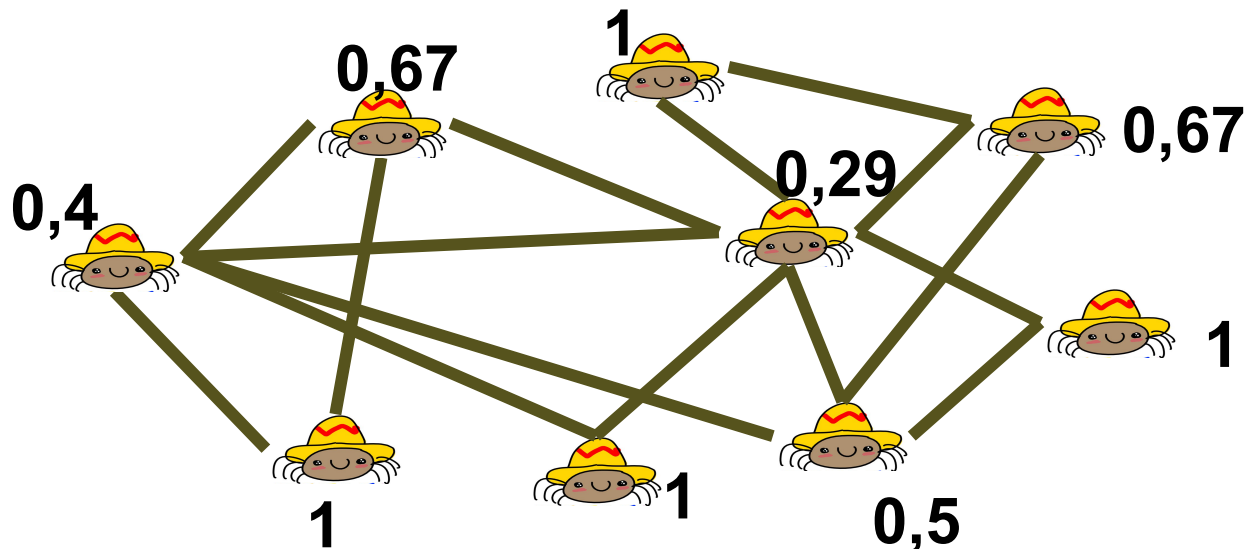


Modelo Barabási-Albert



Dist. média = 1,67

Coef. Agrupamento = 0,724



A densidade dessa rede é: $p=15/(72/2)=0.42 \Rightarrow C \gg p$



Modelo Barabási-Albert



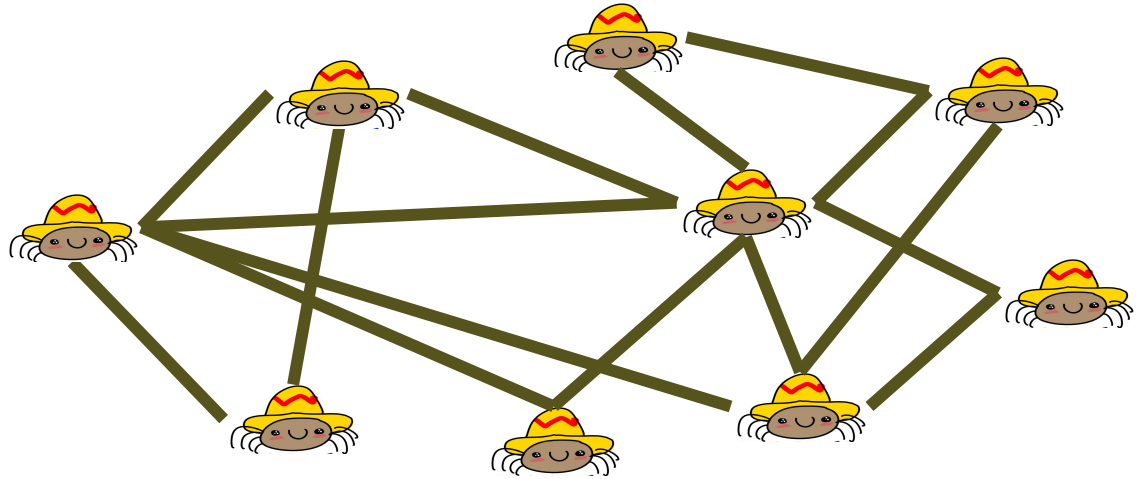
$$P(k=2) = 4$$

$$P(k=3) = 2$$

$$P(k=4) = 1$$

$$P(k=5) = 1$$

$$P(k=7) = 1$$



Modelo Barabási-Albert



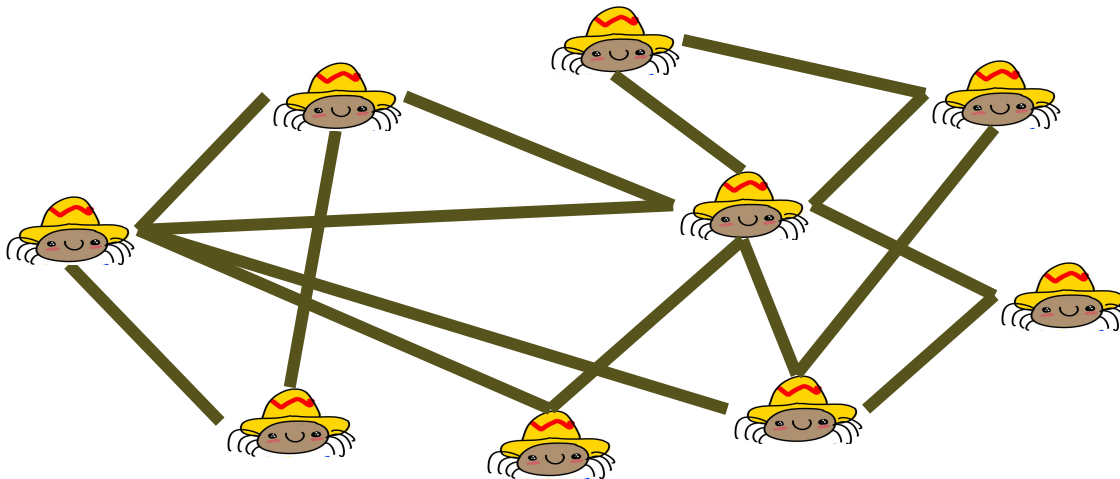
$$P(c=1) = 4$$

$$P(c=0,67) = 2$$

$$P(c=0,5) = 1$$

$$P(c=0,4) = 1$$

$$P(c=0,29) = 1$$



Modelo Barabási-Albert

$$P(k) \approx k^{-3} \quad D \approx \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))} \quad P(c) \approx c^{-\frac{3}{4}}$$



Alterações no modelo Barabási-Albert

1. Função de afinidade
2. Crescimento de Arestas (fechamento triádico)
3. Envelhecimento dos nós.



Função de Afinidade

- ❑ Uma estação de metrô com bastante demanda;
- ❑ Uma pessoa muito famosa;
- ❑ Um animal carnívoro que se alimenta de muitos outros.



Função de Afinidade

$$P(k_i, \eta_i) = \frac{k_i \eta_i}{\sum_{j=1}^n k_j \eta_j}$$

